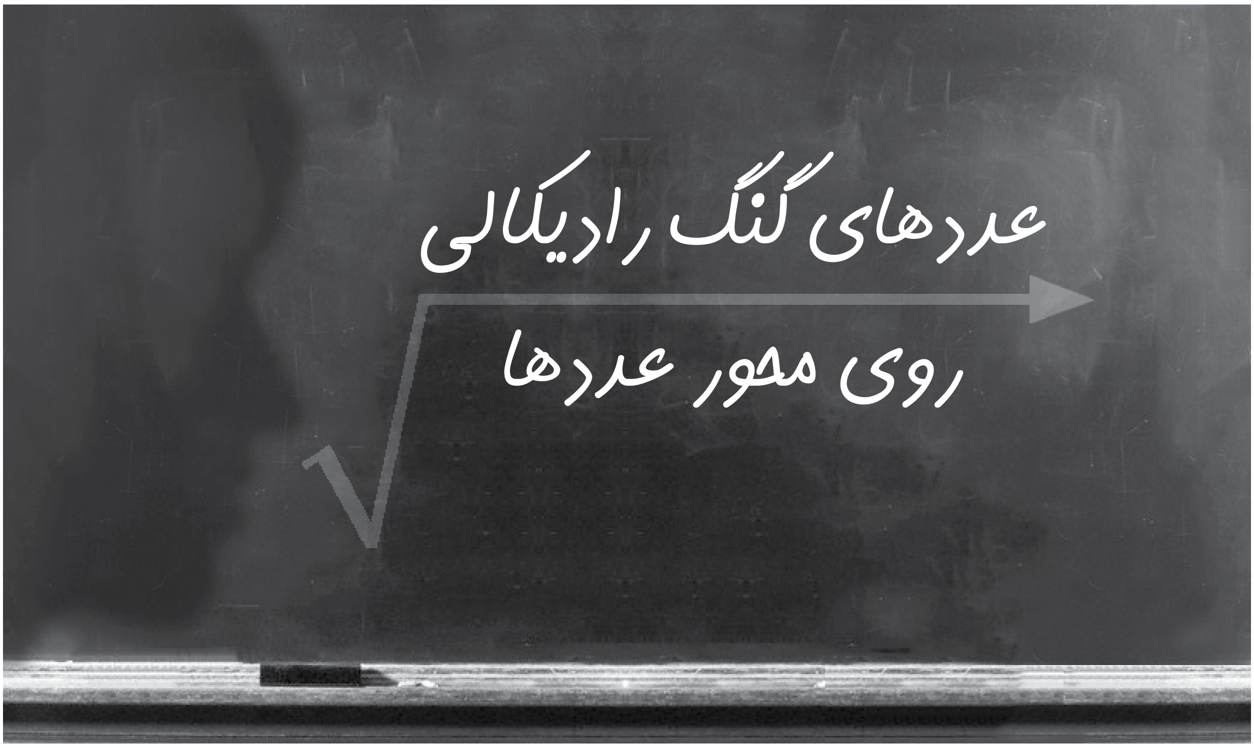
سیدجمال میرحسینی، دبیر مدارس سمپاد استان البرز



اشاره

می‌دانیم مجموعهٔ عددهای گنگ یا اصم مجموعه‌ای نامتناهی و ناشماراســـت، و برای مشخص کردن اعداد گنگ روی محور اعداد حقیقی روش‌هایی وجود دارد که در این مقاله از روش جالبی تعدادی از این اعداد را روی محور اعداد حقیقی مشخص می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها **عدد گنگ، محور اعداد، مثلث، پرگار**

مسئله: عـــدد $M = \sqrt{20} + \sqrt{19} + \sqrt{11} + \sqrt{7}$ را روی محور عددها نمایش دهید.

متداول‌ترین روش برای حل مسئلهٔ بالا این است که هر یک از عددها را جداگانه به‌وســیلهٔ مثلث قائم‌الزاویه و رابطهٔ **فیثاغورس** تولید کنیم. ســپس به‌وســیلهٔ پرگار کمان‌هایی متوالی به اندازهٔ آن‌ها رسم کنیم. ولی در ادامه می‌خواهیم روشی ســاده‌تر، قابل ترسیم‌تر و قابل درک‌تر را بیــان کنیم که امید اســت مورد توجــه علاقه‌مندان و دانش‌آموزان قرار گیرد.

نخست مطالب زیر را مرور می‌کنیم که لازمهٔ حل این مسئله است.

اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $2n+1$ یک عدد فرد طبیعی خواهد بود. از طرف دیگر داریم:

$$\left(\sqrt{2n+1}\right)^2 = 2n+1$$

با توجه به رابطهٔ قبل می‌توان نتیجه گرفت:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

یعنی هر عدد فرد بزرگ‌تر از یک را می‌توان از تفاضل دو عدد مربع کامل متوالی تولید کرد.

به‌عبارت دیگر:

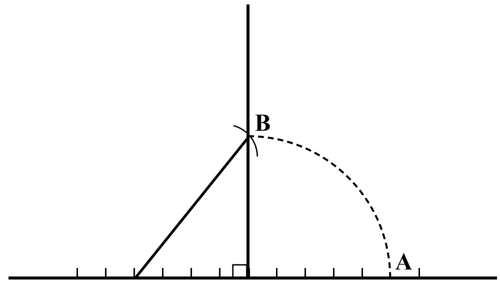
$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 = (\sqrt{2n+1})^2$$

با این ســه عدد می‌توان یک مثلث رسم کرد[1] و کافی است مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته شده را روی محور به نمایش بگذاریم.

برای مثال، برای یافتن $\sqrt{7}$ که در آن $n=3$ اســت، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌توان ســاخت که اضلاع زاویهٔ قائم آن $\sqrt{7}$ و ۳ و وتر آن ۴ باشد (شکل ۱).

ابتدا نیم‌خط ox را عمود بر محور می‌کشــیم. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ وتر (۴) باز می‌کنیم و از نقطهٔ ۳- کمانی

رســـم می‌کنیم تا نیم‌خط ox را در نقطهٔ A قطع کند. در نتیجه داریم: $\overline{OA}=\sqrt{۷}$.



شکل ۱

حال اگر دهانهٔ پرگار را بـــه اندازهٔ $\overline{OA}$ باز کنیم و از نقطهٔ O کمانی رسم کنیم تا جهت مثبت محور را در نقطهٔ B قطع کند، قطعاً نقطهٔ B نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۷}$ اســـت.

بـــرای همهٔ عددهای فرد طبیعـــی بزرگ‌تر از یک می‌توان چنین مثلثی ساخت. از طرف دیگر، برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک مانند k می‌توان نوشت:

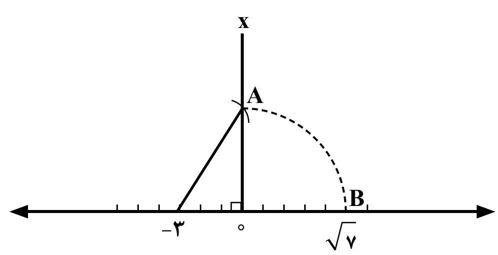
$$(k+۱)^۲-(k-۱)^۲=۴k$$

این یعنی: هر عدد زوج را که مضرب ۴ باشد، می‌توان به‌صورت تفاضل دو عدد مربع کامل نوشت. همچنین داریم:

$$k>۱\Rightarrow ۴k>۴\Rightarrow \sqrt{۴k}>۲\Rightarrow$$
$$k+\sqrt{۴k}>k+۲\Rightarrow (k-۱)+\sqrt{۴k}>k+۱$$

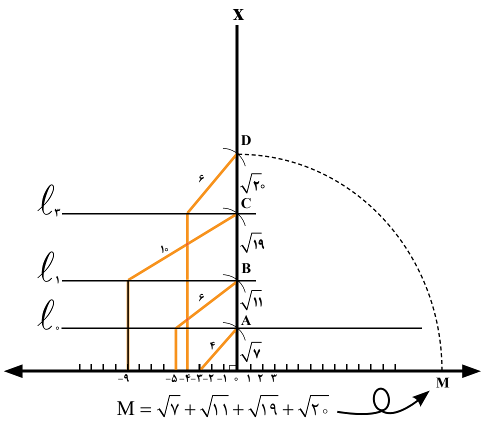
پـــس با این ســـه مقـــدار $((k+۱),(k-۱),\sqrt{۴k})$ می‌توان یک مثلث رســـم کرد. روشـــن است که این مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود و وتر آن k+۱ است.

بـــرای یافتن عددی ماننـــد $\sqrt{۲۰}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. (شـــکل ۲)، ابتدا نیم‌خـــط ox را عمود بر محور رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ ۴-=(۱-۵)-=(k-۱)- کمانی به شعاع ۶=۱+۵=(k+۱) رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ B قطع کند. واضح است که: $\overline{OB}=\sqrt{۲۰}$. کافی است از نقطهٔ O کمانی به شـــعاع $\overline{OB}$ رسم کنیم تا جهت مثبت محـــور را در نقطهٔ A قطع کند. نقطهٔ A نقطهٔ نمایش عدد $\sqrt{۲۰}$ خواهد بود.



شکل ۲

حال نوبت حل مســـئلهٔ مطرح شده در ابتدای مطالب رسیده است (شکل ۳)، ابتدا نیم‌خط ox را عمود بر محور رسم می‌کنیم. از نقطهٔ ۳- کمانی به شعاع ۴ رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ A قطع کند. پس: $\overline{OA}=\sqrt{۷}$.



شکل ۳

اکنون خط $l_۰$ را از نقطهٔ A عمود بر ox رسم می‌کنیم که درواقع محور جدیدی است. به عبارت دیگر، محور اولیه را به اندازهٔ $\sqrt{۷}$ بـــه نقطهٔ A منتقل کرده‌ایم. روی محور $l_۰$ از نقطـــهٔ ۵- کمانی به شـــعاع ۶ رســـم می‌کنیم تا ox را در نقطـــهٔ B قطع کند. پس: $\overline{AB}=\sqrt{۱۱}$ و در نتیجه: $\overline{OB}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}$.

بـــار دیگر خـــط $l_۱$ را از نقطهٔ B عمود بر ox رســـم می‌کنیم تـــا محور $l_۱$ به‌وجـــود بیاید. از نقطـــهٔ ۹- روی محور $l_۱$ کمانی به شـــعاع ۱۰ رســـم می‌کنیم تا ox را در نقطـــهٔ C قطع کنـــد. داریـــم: $\overline{BC}=\sqrt{۱۹}$ و در نتیجه: $\overline{OC}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۹}$. و دیگـــر بار محـــور $l_۲$ را از نقطهٔ C عمود بر ox رســـم می‌کنیـــم و از نقطهٔ ۴- روی محور $l_۲$ کمانی به شعاع ۶ رسم می‌کنیم تا ox را در نقطهٔ D قطع کند. به‌وضـــوح داریم: $\overline{CD}=\sqrt{۲۰}$ و در نتیجه: $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\sqrt{۷}+\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۹}+\sqrt{۲۰}$.

حال اگر از نقطهٔ O کمانی به شعاع $\overline{OD}$ رسم کنیم تـــا جهت مثبت محور اول را در نقطهٔ E قطع کند، متوجه خواهیم شد که E نقطهٔ نمایش عدد مورد نظر خواهد بود. روشن است که هر تعداد از این نوع عددها به آن‌ها اضافه شـــوند، می‌توان مقـــدار آن را روی محور جدا کرد و نقطهٔ نمایش آن را مشخص ساخت.

* پی‌نوشت

1. $\left[n>۱\Rightarrow ۲n>۱\Rightarrow ۲n+۱>۱\Rightarrow \sqrt{۲n+۱}>۱\Rightarrow n+\sqrt{۲n+۱}>n+۱\right]$